7 Si ha bisogno di affittare un appartamento per 6 mesi. Se ne trova uno al prezzo di 1000€ mensili, e si lascia un deposito non rimborsabile pari al primo mese d'affitto. Subito dopo si trova un appartamento identico che costa solo 900€ mensili. Discutere se conviene restare nel primo appartamento o passare al secondo.

Svolgimento. Il testo dell'esercizio è volutamente vago e si presta a varie interpretazioni. In particolare, nel corso dello svolgimento dovremo prendere alcune decisioni sui dati che non sono forniti esplicitamente nel testo: "discutere se conviene" fa sicuramente pensare al confronto tra due operazioni finanziarie. Ma come le confrontiamo? con il criterio del REA o con quello del TIR? Se vogliamo usare il criterio del REA, qual è il tasso di valutazione da usare? "Discutere" significa risolvere l'esercizio scegliendo (e motivando la scelta) di volta in volta i parametri necessari.

Interpretiamo il testo nel seguente modo (altre interpretazioni sono possibili).

Operazione finanziaria 1: l'affitto di 1000€ si paga all'inizio di ogni mese e il deposito non rimborsabile verrà restituito tra 6 mesi esatti (quando si abbandonerà l'appartamento).

Operazione finanziaria 2: l'affitto di 900€ si paga all'inizio di ogni mese e il deposito non sarà rimborsato (in quanto non si è pagato l'affitto concordato di 1000€ mensili).

Ci troviamo dunque di fronte alle seguenti operazioni finanziarie:

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & -1000 & & & & & & \\
 & -1000 & -1000 & -1000 & -1000 & -1000 & -1000 & +1000 \\
(1) & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \longrightarrow \\
 & -900 & & & & & & \\
 & -1000 & -900 & -900 & -900 & -900 & -900 & 0 \\
(2) & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \longrightarrow
\end{array}
$$

Risolviamo l'esercizio con il criterio del REA. Chiamiamo i il tasso di valutazione mensile, e dunque $\nu = 1/(1+i)$.

$$
\begin{aligned}
\text{REA}_1(i) &= -1000 - (1000 + 1000\nu + \cdots + 1000\nu^5) + 1000\nu^6 = \\
\text{REA}_2(i) &= -1000 - (900 + 900\nu + \cdots + 900\nu^5)
\end{aligned}
$$

Scegliendo per esempio $i = 0.1$, abbiamo $\nu = 0.91$ e

$$
\begin{aligned}
\text{REA}_1(0.1) &= -5226.31 \\
\text{REA}_2(0.1) &= -5311.71
\end{aligned}
$$

Risulta allora più conveniente l'ipotesi 1. Notare come la risposta dipende dal tasso di valutazione: se scegliamo $i = 0.2$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
\text{REA}_1(0.2) &= -4655.71 \\
\text{REA}_2(0.2) &= -4591.55
\end{aligned}
$$

e in tal caso conviene perdere la caparra.

Una discussione più approfondita potrebbe essere lo studio delle due funzioni $\text{REA}_1(\nu)$ e $\text{REA}_2(\nu)$. In tal caso, la determinazione (analitica) del loro andamento e (numerica) della loro unica intersezione con ascissa positiva direbbe che l'operazione finanziaria 1 conviene se e solo se

$\nu > 0.871051$, cioè se e solo se $i < 0.148038$, coerentemente con quanto affermato nei due casi particolari esaminati prima.

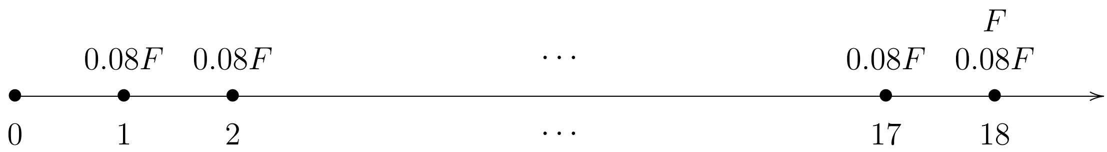
Osserviamo anche che l'analisi di cui sopra presuppone che i 100€ risparmiati nell'ipotesi 2 vengano valutati allo stesso tasso i utilizzato per valutare le ipotesi d'affitto. Questo non è assolutamente indispensabile, e si può ipotizzare un'ipotesi d'investimento dei 100€ tramite un regime $r(t)$. In tal caso, il REA nell'ipotesi 2 andrebbe modificato di conseguenza, aggiungendo

$$\frac{100r(6)}{(1+i)^6}.$$

Infine, osserviamo che per tassi realistici di valutazione, conviene sicuramente l'operazione finanziaria 1 (il tasso i che abbiamo usato è un tasso mensile, e $i = 0.148038$ mensile corrisponde a 4.24174 annuale, cioè più del 400%!!!)

16 Un'obbligazione all'8% ha vita residua 18 anni e YTM 9%. Calcolarne corso e DMF.

Svolgimento. Diciamo F il valore facciale dell'obbligazione. Assumendo tutti i tassi come annuali, il titolo si rappresenta così:



e denotando con $A(\delta)$ il corso del titolo in funzione del tasso istantaneo δ, abbiamo:

$$A(\delta) = 0.08F \sum_{k=1}^{18} e^{-\delta k} + Fe^{-18\delta}, \qquad A'(\delta) = -0.08F \sum_{k=1}^{18} ke^{-\delta k} - 18Fe^{-18\delta}$$

da cui la durata media finanziaria generica del titolo:

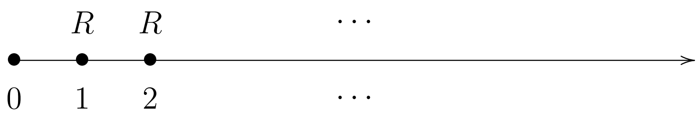
$$\text{DMF}(\delta) = \frac{-A'(\delta)}{A(\delta)} = \frac{0.08F \sum_{k=1}^{18} ke^{-\delta k} + 18Fe^{-18\delta}}{0.08F \sum_{k=1}^{18} e^{-\delta k} + Fe^{-18\delta}} = \frac{0.08 \sum_{k=1}^{18} ke^{-\delta k} + 18e^{-18\delta}}{0.08 \sum_{k=1}^{18} e^{-\delta k} + e^{-18\delta}}$$

Il titolo è venduto sì da produrre YTM $= 0.09$, dunque la sua duration è:

$$\begin{aligned} \text{DMF}(\ln(1.09)) &= \frac{0.08 \sum_{k=1}^{18} ke^{-k\ln(1.09)} + 18e^{-18\ln(1.09)}}{0.08 \sum_{k=1}^{18} e^{-k\ln(1.09)} + e^{-18\ln(1.09)}} \\ &= \frac{0.08 \sum_{k=1}^{18} k1.09^{-k} + 1.09^{-18}}{0.08 \sum_{k=1}^{18} 1.09^{-k} + 1.09^{-18}} = 9.76183 \end{aligned}$$

17 Trovare la DMF di una rendita perpetua costante.

Svolgimento. Rappresentiamo una rendita perpetua costante di rata R sulla retta:



Denotando con $A(\delta)$ il valore della rendita in funzione del tasso istantaneo δ, abbiamo:

$$A(\delta) = R \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\delta k} = R(\frac{1}{1-e^{-\delta}} - 1), \qquad A'(\delta) = R\frac{-e^{-\delta}}{(1-e^{-\delta})^2}$$

da cui la durata media finanziaria generica della rendita perpetua:

$$
\begin{aligned}
\text{DMF}(\delta) = \frac{-A'(\delta)}{A(\delta)} &= R\frac{-e^{-\delta}}{(1-e^{-\delta})^2}/R(\frac{1}{1-e^{-\delta}}-1) \\
&= \frac{-e^{-\delta}}{(1-e^{-\delta})^2}/(\frac{e^{-\delta}}{1-e^{-\delta}}) = \frac{-1}{1-e^{-\delta}}
\end{aligned}
$$